1) Να αναγνωρίσετε το είδος και να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω ολοκληρωμάτων

• $I = \int_0^1 \ln x \, dx$ και • $J = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ δεν ορίζεται στο 0, άρα το I είναι β' είδους. Άρα, έχουμε:

$$\lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \ln x \, dx = \lim_{k \to 0^+} \int_k^1 (x)' \ln x \, dx =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \left(x \cdot \ln x \Big|_k^1 - \int_k^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \left(-k \ln k - \int_k^1 1 \cdot dx \right) =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \left(-k \cdot \ln k - x \Big|_k^1 \right) =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} (-k \cdot \ln k) - \lim_{k \to 0^+} (1-k) =$$

$$= -\lim_{k \to 0^+} k \ln k + \lim_{k \to 0^+} (k-1) =$$

$$= -\lim_{k \to 0^+} (k \cdot \ln k) - 1 \quad (*)$$

όπου το $\lim_{k \to 0^+} (k \cdot \ln k) \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{k \to 0^+} \frac{\ln k}{1/k} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{k \to 0^+} \frac{1/k}{-1/k^2} = -\lim_{k \to 0^+} \frac{k^2}{k} = 0$$

άρα η $(*)$ είναι ίση με την τιμή -1

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+2)^2}$

ορίζεται στο διάστημα $[1,+\infty)$

καθώς επίσης βλέπουμε ότι ένα από τα δύο άκρα του ολοκληρώματος το ∞

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα J είναι α' είδους.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^{k} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx \quad (**)$$

Αρχικά, να βρεθεί το αόριστο

$$\int \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx \quad . \left[\text{Θέτω} \quad x^3+2=u \Leftrightarrow du=3x^2dx\right]$$

άρα το αόριστο θα γίνει ως εξής:

$$\int \frac{1}{3}\,\frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}\int u^{-2}du = \frac{1}{3}\,\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{3(x^3+2)} \ (+c)$$

άρα στην $(**)$ έχουμε:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^{k} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{3(x^3+2)}\right)\Bigg|_1^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3(k^3+2)}\right) = \frac{1}{9}.$$

<u>Σχόλιο</u> Προφανώς το $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx<+\infty$

διότι στον παρονομαστή έχουμε βαθμό 6 ενώ στον αριθμητή έχουμε βαθμό 2 άρα γενικά θα έχουμε αν πάρουμε την $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ ένα γενικευμένο p ολοκλήρωμα με $p=3>1$

2) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$I=\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx \quad \text{και} \quad J=\int_1^{+\infty}(1-x)e^{-x}\,dx$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το I είναι α' είδους αφού το ένα από τα δύο άκρα είναι στο $+\infty$ και η $g(x)=x\cdot e^{-x^2}$ ορίζεται σε όλο το διάστημα $(0,+\infty)$

αρκεί να βρούμε το αόριστο:

$$\int x\cdot e^{-x^2}\,dx \quad (*) \quad \left[\text{Θέτω } u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx\right]$$
$$\left[\ du/2 = x\cdot dx\right]$$

άρα στην (*) είναι:

(*) Το c δεν είναι απαραίτητο εδώ

$$\int x\cdot e^{-x^2}\,dx=\int e^{-x^2}\cdot x\,dx=\int e^{-u}\,\frac{du}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^{-u}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-u}}{-1}(+c)=-\frac{1}{2}e^{-u}(+c)=$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(+c)$$

Άρα η (*) είναι:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k x\cdot e^{-x^2}\,dx=\lim_{k\to+\infty}\left.-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right|_0^k=$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-k^2}+\frac{1}{2}e^{0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(-e^{-k^2}+1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(0+1)=\frac{1}{2}$$

Ομοίως για τον ίδιο λόγο το $\int$ είναι α' είδους
και εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:
Για το Αόριστο:

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = -\int (1-x)\cdot(e^{-x})'\,dx =$$

$$= -\left[(1-x)e^{-x} - \int (1-x)'e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= -\left[(1-x)\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= -\left[(1-x)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1}\right] =$$

$$= -(1-x)\cdot e^{-x} + e^{-x} =$$

(δεν είναι απαραίτητη)

$$= e^{-x}\left(-(1-x)+1\right) = e^{-x}(-1+x+1) = x\cdot e^{-x}\ (+C)$$

άρα στο $\int$ έχουμε:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k (1-x)e^{-x}\,dx = \lim_{k\to+\infty} x\cdot e^{-x}\Big|_1^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\underbrace{k e^{-k}}_{\to 0} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{e}.$$

$$(*)\ \lim_{k\to+\infty} k\cdot e^{-k} \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{k\to+\infty}\frac{k}{e^k} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{e^k} = 0$$

3) Αποφανθείτε για το είδος και τη σύγκλιση των παρακάτω γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

(α) $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$, (β) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^2}\,dx$, (γ) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$

ΛΥΣΗ

(α) Είναι α' είδους (αφού η $\varphi(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x\in[1,+\infty)$ και έχουμε άκρο το $+\infty$)

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad \left[\text{Θέτω } (x^2+1)=u \Leftrightarrow du = 2x\,dx\right]$$

άρα, είναι:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1}(+c) =$$

$$= -\frac{1}{u}(+c) = -\frac{1}{x^2+1} + c$$

άρα, στο γενικευμένο έχουμε

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty} -\frac{1}{x^2+1}\Big|_1^k = \frac{1}{2}$$

άρα συγκλίνει!

(όμοια πάλι αν επιλέγαμε την $f(x)=\frac{1}{x^3}$ και εφαρμόζαμε οριακό κρ. σύγκρισης θα είχε προκύψει ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx < +\infty$)

(β) Πρόκειται για α' είδους

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^2}\, dx .$$

αλλά ισχύει η σχέση: $\boxed{\frac{\sqrt{x^5}}{x^2} \leq \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^2}}$

εξετάζω ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{x^2}\, dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{5/2}}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} x^{1/2}\, dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, dx = +\infty$$

άρα από κρ. σύγκρισης

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, dx = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^2} = +\infty .$$

(γ) Πρόκειται για γ' είδους (είναι εκτατικό και στο άκρο όπου η $\frac{1}{x^{1/3}}$ δεν ορίζεται στο 0)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$$

$$\parallel$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$$

p ολοκλήρωμα με βαθμό $p = \frac{1}{3} < 1$ άρα αποκλίνει

συνεπώς θα αποκλίνει και το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$

παρόλο που το $\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$ θα συγκλίνει